

Simultane Approximation durch Polynome und holomorphe Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Dieter Wrase

aus Kalisch

1970

Simultane Approximation durch Polynome und holomorphe Funktionen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Dieter Wrase

aus Kalisch

1. Referent: Professor Dr. A. Dinghas

2. Referent: Professor Dr. H. Pachale



Tag der mündlichen Prüfung: 29. April 1970

Tag der Promotion:

15. JUNI 1970

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. A. Dinghas,
danke ich für sein stetes Interesse an meiner mathemati-
schen Ausbildung und für die rege Förderung meiner Arbeit.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
<u>Kapitel I:</u> Approximation durch Polynome und holomorphe Funktionen	4
1.) Ein Satz von Mergelyan	4
2.) Carleman - Kontinua	9
<u>Kapitel II:</u> Simultane Approximation durch Polynome.	14
1.) Vorbemerkungen.	14
2.) Eine Eigenschaft der Funktionen aus $S(E)$	14
3.) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Funktion f zur Klasse $S(E)$ gehört.	17
<u>Kapitel III:</u> Simultane Approximation durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen.	23
1.) Einführende Bemerkungen.	23
2.) Simultane Approximation einer auf der reellen Achse mehrfach differenzierbaren Funktion	25
3.) Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kaplan.	30
Literaturverzeichnis	37

Vorwort

Das Problem, auf welchen Teilmengen E der komplexen Ebene C jede auf E stetige und im Inneren von E holomorphe Funktion gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist, wurde 1951 durch Mergelyan [11] gelöst. Ebenso konnten schon 1939 Lavrent'ev und Keldys [8] eine vollständige geometrische Beschreibung der Teilmengen E der abgeschlossenen komplexen Ebene angeben, auf denen jede stetige Funktion gleichmäßig und asymptotisch durch ganze Funktionen approximiert werden kann.

Von diesen Ergebnissen ausgehend wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, unter welchen an die Menge E und die auf ihr stetig differenzierbaren Funktionen gestellten Bedingungen diese Funktionen simultan auf E durch Polynome bzw. durch ganze Funktionen approximierbar sind. Dabei soll eine stetig differenzierbare Funktion f simultan durch Polynome bzw. durch holomorphe Funktionen approximierbar heißen, wenn f derartig durch Polynome bzw. durch holomorphe Funktionen angenähert werden kann, daß auch die Ableitung von f gleichmäßig durch die Ableitungen der approximierenden Funktionen angenähert wird.

In Kapitel I wird zunächst der Satz von Mergelyan bewiesen. Aus diesem Satz und mit Hilfe einer von Kaplan stammenden Methode läßt sich relativ kurz der Satz von Lavrent'ev und Keldys ableiten.

Im zweiten Kapitel betrachten wir kompakte Teilmengen E der komplexen Ebene, deren Ränder aus einer beliebigen Vereinigung von glatten Jordankurven und glatten Jordanbögen bestehen und die die Ebene nicht separieren.

Eine auf einer solchen Menge E definierte Funktion f heißt auf dem Rand von E stetig differenzierbar, wenn sie entlang jeder Randkurve und entlang jedes Randbogens differenzierbar und die so erhaltene Funktion f' auf dem Rand von E stetig ist. Es wird gezeigt, daß jede auf E stetig differenzierbare Funktion f genau dann simultan auf E durch Polynome approximierbar ist, wenn der Differenzquotient von f in jedem Punkt von E einen eindeutigen Grenzwert besitzt.

In [6] bewies W.Kaplan, daß jede auf der reellen Achse definierte und dort stetig differenzierbare komplexwertige Funktion simultan und asymptotisch durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen approximierbar ist. Im dritten Kapitel werden zwei Erweiterungen dieses Satzes angegeben. Zunächst wird gezeigt, daß jede auf der reellen Achse stetige, n -fach stetig differenzierbare Funktion f ($n \geq 0$) so durch ganze Funktionen w approximiert werden kann, daß für $-\infty < x < +\infty$ und jede stetige positive Funktion $\varepsilon(r)$ ($0 \leq r < +\infty$) gilt

$$|f^{(\nu)}(x) - w^{(\nu)}(x)| < \varepsilon(|x|) \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Danach wenden wir uns der Frage zu, ob jede auf einer Menge E , die aus vom Nullpunkt ausgehenden glatten Kurven besteht und deren Komplement keine beschränkte Komponente

besitzt, stetig differenzierbare Funktion simultan durch ganze Funktionen approximierbar ist. Es folgt leicht, daß E nur aus endlich vielen Kurven bestehen darf. Schließlich wird gezeigt:

Besteht die Menge E aus Kurven $S_1, \dots, S_n$, die die Darstel-

$$\text{lung } S_k = S_k(r) = r e^{i \varphi_k(r)} \quad (K = 1, \dots, m; r \in [0, +\infty[)$$

besitzen, wobei die Funktionen φ_k stetig differenzierbar sind und der Bedingung

$$r \frac{d}{dr} \varphi(r) = o(1) \quad \text{genügen,}$$

ist die Funktion f stetig differenzierbar auf E und ist $\varepsilon(r)$ eine für $0 \leq r < +\infty$ positive stetige Funktion, dann existiert eine ganze Funktion w mit

$$|f(z) - w(z)| < \varepsilon(|z|), \quad |f'(z) - w'(z)| < \varepsilon(|z|)$$

für alle $z \in E$.

Kapitel I: Approximation durch Polynome und holomorphe Funktionen

1.) Ein Satz von Mergelyan

Die Frage, wann sich eine Funktion f , die auf einer kompakten Teilmenge E der komplexen Ebene ($\mathbb{C}$) definiert ist, gleichmäßig auf E durch Polynome approximieren läßt, wurde im Jahre 1951 durch Mergelyan vollständig gelöst. Er zeigte

Satz 1:

Eine beliebige auf der kompakten Menge E stetige Funktion f ist genau dann auf E gleichmäßig durch Polynome approximierbar, wenn f in allen inneren Punkten von E analytisch ist und E die Ebene nicht separiert.

Da einige der zum Beweis dieses Satzes von Mergelyan entwickelten Methoden in Kapitel II verwendet werden, soll eine kurze Skizze des Beweises angegeben werden. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar.

Es sei $D_1, D_2, \dots$ eine Folge von offenen Mengen, die folgenden Bedingungen genügen:

- 1.) $E \subset \bar{D}_{n+1} \subset D_n$ $n = 1, 2, \dots$
- 2.) Jedes D_n besteht aus einer endlichen Anzahl von einfach zusammenhängenden Gebieten, deren Ränder analytisch sind.

$$3.) \quad (\setminus E = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\setminus \bar{D}_n)$$

R sei ein achsenparalleles Rechteck, das D_1 im Inneren enthält und f sei auf R stetig fortgesetzt. Die Funktion $f(z)$ ist dann auf R gleichmäßig durch Funktionen $\Phi_k(z)$ approximierbar, die stetige partielle Ableitungen nach x und y besitzen ($z = x + iy$).

Ist z_0 ein fester Punkt aus D_n , so entfernen wir eine ε - Umgebung von z_0 , die ganz in D_n liegt. $\Phi_k(z)$ besitzt stetige partielle Ableitungen nach x und y, und

$\frac{1}{z - z_0}$ ist analytisch in D_n $K_\varepsilon = D_n^\varepsilon$, also ist hier

auf $\frac{\Phi_k(z)}{z - z_0}$ die Greensche Formel anwendbar, und

lassen wir dabei ε gegen Null gehen, so erhalten wir schließlich:

$$\Phi_k(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_n \frac{\Phi_k(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{D_n} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi_k(z)}{z - z_0} dz d\bar{z},$$

wobei $\int_n$ der orientierte Rand von D_n ist und der Aus-

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Phi_k(z) &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) + \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{\partial}{\partial x} v(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \right) \right) \end{aligned}$$

($\Phi_k = u + iv$) ist.

Da $\Phi_k(z)$ gleichmäßig auf D_n gegen $f(z)$ geht, erhalten

wir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{D_n} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta d\bar{\zeta}$$

wobei formal

$$\int_{D_n} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D_n} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \phi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

gesetzt wird.

$$\int_{\Gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{ist analytisch auf } E \text{ und kann daher}$$

durch Polynome gleichmäßig auf E (Satz von Runge) approximiert werden. Da in E $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = 0$ ist, und ϕ_k gleichmäßig auf E gegen f konvergiert, ist also nur zu zeigen, daß

$$R(z) = \int_{E_1 = E \setminus \dot{E}} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \phi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

gleichmäßig auf E_1 durch Polynome approximierbar ist, denn

$$\int_{D_n \setminus \dot{E}} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \phi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

konvergiert mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen

$$\int \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Phi_k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta}$$

$$E_1 = E \setminus \dot{E}$$

Dies folgt aber aus einem

Lemma von Mergelyan [10] :

Zu jedem $\zeta \in E_1$ und zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $P_\zeta(z)$, für das die folgenden Ungleichungen erfüllt sind:

$$(1) \quad |P_\zeta(z)| < \frac{A}{|\zeta - z|} \quad z \in E_1$$

$$(2) \quad \left| P_\zeta(z) - \frac{1}{\zeta - z} \right| < B\varepsilon \quad \text{für } z \in E_1 \quad |z - \zeta| \geq \varepsilon$$

E_1 ist kompakt, und aus Stetigkeitsgründen existieren dann zu vorgegebenem ε n Punkte $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, $n = n(\varepsilon)$, derart daß zu jedem $\zeta \in E_1$ ein P_{ζ_j} existiert, das $\frac{1}{\zeta - z}$ im Sinne von (1) und (2) approximiert.

Es sei nun

$$F(z) = \int_{E_1} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Phi_k(\zeta) P_\zeta(z) d\zeta d\bar{\zeta} \quad \text{und} \quad M = \max_{E_1} \left| \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Phi_k(z) \right|$$

$$|R(z) - P(z)| < \int_{\substack{E_1 \\ |\zeta - z| \leq \varepsilon}} M \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_\zeta(z) \right| d\sigma +$$

$$\int_{\substack{E_1 \\ |\zeta - z| > \varepsilon}} M \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_\zeta(z) \right| d\sigma$$

$$|R(z) - P(z)| < 2\pi M(A + 1) + MB \ln(E_1)$$

2.) Carleman - Kontinua

Eine abgeschlossene Teilmenge E der abgeschlossenen komplexen Ebene heißt Carleman - Kontinuum, wenn es zu jeder auf E stetigen komplexwertigen Funktion f und zu jeder positiven stetigen Funktion $\varepsilon(r)$ ($0 \leq r < +\infty$) eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w gibt, derart daß

$$|f(z) - w(z)| < \varepsilon(|z|) \quad \text{für jedes } z \in E \text{ ist.}$$

1939 konnten Keldýs und Lavrent'ev eine vollständige geometrische Beschreibung eines Carleman - Kontinuums angeben. Sie zeigten

Satz 2:

E ist genau dann ein Carleman - Kontinuum, wenn

(a) E keine inneren Punkte besitzt

(b) eine monoton gegen $+\infty$ strebende Zahlenfolge

$0 = r_0, r_1, r_2, \dots$ existiert, so daß für jedes n ($n = 0, 1, \dots$) das Komplement der Menge

$E \cup \{z : |z| \leq r\}$ keine beschränkte Komponente besitzt.

Mit Hilfe des Satzes von Mergelyan und einer von Kaplan stammenden Methode können wir einen relativ kurzen Beweis dieses Satzes angeben.

Die Menge E genüge den Bedingungen (a) und (b), die Funktion f sei stetig auf E und $\varepsilon(r)$ sei positiv und

stetig für $0 \leq r < +\infty$. Es existiert dann eine positive Zahlenfolge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, derart daß $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$ und $\varepsilon_n < \varepsilon(r)$ für $r_n \leq r \leq r_{n+1}$ ist.

Weiter sei noch $d_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Im folgenden benutzen wir die abkürzenden Bezeichnungen:

$$K_n := \{z : |z| \leq r_n\}, \quad K_0 := \emptyset, \quad E_n := K_n \cup [K_{n+1} \cap E]$$

$$\text{und } E_n^\varphi := E_n \setminus \{z : |z| < r_n + \varphi\} \quad (n = 1, 2, \dots; \\ \varphi \text{ hinreichend klein gewählt})$$

Die Funktion $f(z)$ und die Menge E_0 genügen den Voraussetzungen des Satzes von Mergelyan, daher existiert ein Polynom $P_0(z)$ mit

$$|P_0(z) - f(z)| < d_0 \quad \text{für } z \in E_0$$

Nun konstruieren wir induktiv eine Polynomfolge $P_n(z)$.

Es sei das Polynom $P_n(z)$ ($n \geq 0$) bestimmt, dann definieren wir die Funktion $g_{n+1}(z)$:

$$g_{n+1}(z) = \begin{cases} P_n(z) & , \quad z \in K_{n+1} \\ f(z) & , \quad z \in E_{n+1} \end{cases}$$

und auf dem übrigen Teil von E_{n+1} wird $g_{n+1}(z)$ stetig fortgesetzt, derart daß $|g_{n+1}(z) - f(z)| < d_n$ ist.

E_{n+1} separiert die Ebene nicht und $g_{n+1}(z)$ ist stetig auf E_{n+1} und analytisch in den inneren Punkten von E_{n+1} .

Also existiert ein Polynom $P_{n+1}(z)$ mit:

$$|g_{n+1}(z) - P_{n+1}(z)| < d_{n+1} \quad \text{für jedes } z \in E_{n+1}.$$

Für die so konstruierte Polynomfolge gilt nun:

$$|P_{n+1}(z) - P_n(z)| < d_{n+1} \quad \text{für } z \in K_{n+1}$$

Somit existiert

$$w(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = P_0(z) + \sum_{v=0}^{\infty} [P_{v+1}(z) - P_v(z)]$$

auf jeder kompakten Teilmenge der Ebene. $w(z)$ ist also eine ganze Funktion.

Für $z \in E$, $r_n \leq |z| \leq r_{n+1}$ ist

$$|f(z) - P_n(z)| \leq |f(z) - g_n(z)| + |g_n(z) - P_n(z)| < d_{n-1} + d_n$$

und somit:

$$\begin{aligned} |f(z) - w(z)| &\leq |f(z) - P_n(z)| + |P_n(z) - w(z)| \leq \\ &\leq |f(z) - P_n(z)| + \sum_{v=n}^{\infty} |P_{v+1}(z) - P_v(z)| \leq \\ &\leq \sum_{v=n-1}^{\infty} d_v = \sum_{v=n}^{\infty} (\varepsilon_v - \varepsilon_{v+1}) = \varepsilon_n < \varepsilon(|z|) \end{aligned}$$

Also ist für jedes $z \in E$:

$$|f(z) - w(z)| < \varepsilon(|z|)$$

Die Notwendigkeit der Bedingung (a) ist klar, ebenso darf das Komplement von E keine beschränkte Komponente enthalten.

Es sei also die Bedingung (b) nicht erfüllt.

Dann existiert eine positive Zahl r , so daß das Komplement von $E \cup \{z : |z| \leq r\}$ abzählbar viele Gebiete $G_1, G_2, \dots$ enthält, derart daß die Durchmesser der G_n mit n unbeschränkt wachsen.

Es sei nun ζ_n der Randpunkt von G_n , der den größten Abstand vom Nullpunkt hat. Die Gebiete G_n können so gewählt werden, daß sie maximal sind und für

$n = 1, 2, \dots$ gilt

$$|\zeta_{n+1}| > 2 |\zeta_n| > 3r$$

Mit Γ_n bezeichnen wir die Randpunkte von G_n , die in dem Kreis $|\zeta_n - z| = r$ liegen. Die Mengen Γ_n sind dann paarweise disjunkt und gehören zu E . Da der Fall (a) ausgeschlossen ist, gibt es in jedem Gebiet G_n einen Punkt a_n mit $|a_n| = 2r$.

$\omega = \varphi_n(z)$ bilde nun das Gebiet G_n konform auf $|\omega| < 1$ ab, wobei der Punkt a_n in den Punkt $\omega = 0$ übergehe.

Γ_n wird dann auf eine Punktmenge von $|\omega| = 1$ abgebildet, die das positive lineare Maß $\lambda_n > 0$ besitzt.

Es sei $f(z)$ eine auf E stetige reellwertige Funktion mit den Eigenschaften:

$$f(z) > 1 \quad z \in E$$

$$f(z) > \frac{2\pi n}{\lambda_n} + 1 \quad z \in \Gamma_n$$

Angenommen, es existiert eine ganze Funktion $w(z)$ derart, daß $|w(z) - f(z)| < 1$ für $z \in E$ ist. Dann ist

Re $w(z) := u(z) > 0$ auf E und $u(z) > \frac{2\pi n}{\lambda_n}$ auf Γ_n .

Es sei m das Minimum von $u(z)$ auf $|z| = r$, dann ist die Funktion $u[\varphi_n^{-1}(\omega)] + |m|$ in $|\omega| < 1$ harmonisch, überall auf dem Rand $|\omega| = 1$ positiv und auf einer Randmenge vom Maße λ_n größer als $\frac{2\pi n}{\lambda_n}$. Daraus folgt aber (R. Nevanlinna [14]), daß

$$u[\varphi_n^{-1}(\omega)] + |m| > \frac{\lambda_n}{2\pi} \frac{2\pi n}{\lambda_n} = n \text{ auf } |\omega| \leq 1 \text{ ist.}$$

Damit wäre aber $u(a_n) > n - m$, das ist aber nicht möglich, da dann $u(z)$ auf $|z| = 2r$ unbeschränkt sein müßte.

Kapitel II: Simultane Approximation durch Polynome

1.) Vorbemerkungen

Es sei wieder E eine kompakte Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$, die die Ebene nicht separiert. Um im folgenden Differenzierbarkeit einer Funktion f auf dem Rande von E erklären zu können, setzen wir voraus, daß der Rand von E aus einer Vereinigung von glatten Jordankurven und glatten Jordanbögen besteht. Eine auf E definierte Funktion heißt dann stetig differenzierbar auf dem Rand von E , wenn f entlang jeder Randkurve und entlang jedes Randbogens differenzierbar und die so erhaltene Funktion f' stetig auf dem Rand von E ist.

Eine auf E definierte stetig differenzierbare Funktion sollsimultan approximierbar auf E heißen, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Polynom p existiert mit:

$$|p(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad |p'(z) - f'(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in E.$$

Mit $S(E)$ bezeichnen wir die Klasse der auf E simultan approximierbaren Funktionen.

Wir wollen nun notwendige und hinreichende Kriterien dafür angeben, daß eine auf E stetig differenzierbare Funktion f zur Klasse $S(E)$ gehört.

2.) Eine Eigenschaft der Funktionen aus $S(E)$

Zunächst zeigen wir, daß nicht jede auf E stetig differenzierbare Funktion f simultan auf E approximierbar

ist. Es gilt nämlich

Satz 3:

Ist $f \in S(E)$ und z_0 ein beliebiger Punkt aus E , dann gilt für jede Folge $\{z_\nu\}$ von Elementen aus E , die gegen z_0 konvergiert:

$$\lim_{z_\nu \rightarrow z_0} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{z_\nu - z_0} = f'(z_0)$$

Beweis: Da $f \in S(E)$ ist, existiert eine Folge von Polynomen p_μ , derart, daß p_μ gegen f und p'_μ gegen f' gleichmäßig auf E konvergiert, also auch gleichmäßig auf der Menge $\{z_\nu, z_0\} \subset E$, wobei $\{z_\nu\}$ eine beliebige gegen z_0 konvergierende Folge ist. Es ist dann

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} p'_\mu(z_0) = f'(z_0)$$

Setzen wir zur Abkürzung $q_{\mu\nu} = \frac{p_\mu(z_\nu) - p_\mu(z_0)}{z_\nu - z_0}$

so ist $\lim_{\nu \rightarrow \infty} q_{\mu\nu} = p'_\mu(z_0)$ für jedes μ und somit

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \lim_{\nu \rightarrow \infty} q_{\mu\nu} = f'(z_0)$$

Die Funktionenfolge p_μ konvergiert gleichmäßig auf E gegen f ; somit ist die Zahlenfolge $q_{\mu\nu}$ für μ gleichmäßig in ν konvergent. Deshalb existiert auch der Grenzwert $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} q_{\mu\nu}$ und ist gleich $f'(z_0)$. Dabei ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lim_{\mu \rightarrow \infty} q_{\mu\nu} = \lim_{z_\nu \rightarrow z_0} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{z_\nu - z_0} = f'(z_0).$$

Der Vollständigkeit wegen geben wir ein Beispiel einer auf einer Menge E stetig differenzierbaren Funktion f , die aber nicht den Bedingungen des Satz 3 genügt.

Es sei

$$E = \{ z : z = x + iy, x \in [0,1], y = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0 \}$$

$$f(z) = iy$$

Dann ist $f'(z) \equiv 0$ auf E aber in y - Richtung ist

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{iy} = 1$$

3.) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür,
daß eine Funktion f zur Klasse $S(E)$ gehört.

Die Menge E genüge den unter 1.) angegebenen Bedingungen.

Wir zeigen nun

Satz 4

Eine auf der Menge E stetig differenzierbare Funktion f ist genau dann auf E simultan durch Polynome approximierbar, wenn überall auf E der Differenzenquotient

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

einen eindeutigen Grenzwert besitzt.

Die Notwendigkeit der Bedingung ist schon unter 2.) gezeigt worden. Es bleibt zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist.

Dazu wählen wir zunächst eine Folge von kompakten Mengen D_n , die den folgenden Bedingungen genügt.

- (1) Jede Menge D_n besteht aus endlich vielen analytisch berandeten Bereichen.
- (2) $E \subset D_{n+1} \subset \overset{\circ}{D}_n \quad n = 1, 2, \dots$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = E$

Mit R bezeichnen wir ein achsenparalleles Rechteck, das D_1 im Inneren enthält.

Die Menge E ist kompakt und f ist stetig auf E ; wir können daher f stetig auf R fortsetzen. Es sei also f auf R stetig fortgesetzt; dann existiert, gemäß dem Weierstraßschen Approximationssatz für zwei reelle Veränderliche, eine Folge von Polynomen $\prod_n(x, y)$, die $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ gleichmäßig auf R approximiert. Aus der Greenschen Formel erhalten wir, den Entwicklungen aus Kapitel I, 1.) entsprechend,

chend, für jedes Π_n eine Darstellung durch

$$2\pi i \Pi_n(z) = \int_{\Gamma_k} \frac{\Pi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{D_k} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \Pi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta},$$

wobei z ein beliebiger innerer Punkt von D_k und Γ_k der positiv orientierte Rand von D_k ist.

Ist z_0 ein beliebiger Punkt aus E , so ist die Funktion

$$g_{z_0}(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \quad \text{stetig auf } E.$$

Bezeichnen wir mit $\omega_f(\delta)$ den Stetigkeitsmodul von f auf E , so ist $\omega_f(\delta) < A\delta$ ($A > 0$ hinreichend groß gewählt) und somit

$$|g_{z_0}(z_1)(z_1 - z_0) - g_{z_0}(z_2)(z_2 - z_0)| < 2A|z_1 - z_2| \quad \text{für}$$

jedes $z_1, z_2 \in E$. Wir können daher g_{z_0} auf R derartig stetig

fortsetzen, daß

$$|g_{z_0}(z_1)(z_1 - z_0) - g_{z_0}(z_2)(z_2 - z_0)| < B|z_1 - z_2| \quad \text{für}$$

jedes $z_1, z_2 \in R$ ist, wenn nur B genügend groß gewählt wird.

Durch $f_{z_0}(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g_{z_0}(z)(z - z_0)$ erhal-

ten wir somit eine spezielle Fortsetzung von f auf R .

Sind z_1, z_2 zwei beliebige Punkte aus E , so ist $f_{z_1} \equiv f_{z_2}$ auf E ;

wir können daher die Fortsetzung von g_z so wählen, daß stets

$f_{z_1} \equiv f_{z_2}$ auf R ist. Die so erhaltene Fortsetzung von f ,

die wir auch mit f bezeichnen, hat die Eigenschaften

$$(a) \quad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + g_{z_0}(z)(z - z_0) \quad \text{für}$$

jedes $z_0 \in E$, wobei $g_{z_0}(z)$ stetig auf R und $g_{z_0}(z_0) = 0$

ist.

(b) $\omega_f(\delta) < C\delta$, C eine Konstante.

Wegen der Eigenschaft (a) ist

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \text{für jedes } z_0 \in E ,$$

daher folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von Π_n gegen f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big|_{z_0} \Pi_n(z) = 0 \quad \text{für jedes } z_0 \in E.$$

Die Funktion w_n^k ($n = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$)

$$w_k^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\Pi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{sind holomorph}$$

auf E und konvergieren gleichmäßig in k und auf E gegen

$$w_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Es sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann existiert ein $n(\varepsilon)$ mit

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } z \in E \text{ und } n > n(\varepsilon).$$

Nun ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Pi_n(z) = 0$ auf E , daher können wir

$n > n(\varepsilon)$ so groß wählen, daß $|\frac{\partial}{\partial z} \Pi_n(z)| < \frac{\pi\varepsilon}{4} m(D_1)$

auf E ist. Zu n existiert dann ein $k(n)$ mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Pi_n(z) \right| < \frac{\pi\varepsilon}{2} m(D_1) \quad \text{auf } D_k \quad \text{für alle } k > k(n).$$

Somit erhalten wir

$$|\Pi_n(z) - w_k^n(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{D_k} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Pi_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta d\bar{\zeta} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für $n > n(\varepsilon)$, $k > k(n)$, und wenn wir n genügend groß wählen,

$$n > n_1(\varepsilon) \geq n(\varepsilon), \quad |w_k^n(z) - w_k(z)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für}$$

alle k und alle $z \in E$.

Somit folgt

$$|\prod_n(z) - w_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und daher}$$

$$|f(z) - w_k(z)| < \varepsilon \quad \text{auf } E \text{ für } k > k(n_1) = k(\varepsilon).$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß die Ableitungen der oben konstruierten Funktionenfolge w_k die Funktion f' gleichmäßig auf E approximieren.

Es sei z_0 ein beliebiger Punkt aus E , dann folgt aus der Eigenschaft (a) der Funktion f :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$$

Für $0 < \varrho < r$ erhalten wir bei genügend kleinem r aus der Greenschen Formel

$$\int_{|z-z_0|=\varrho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz + \int_{|z-z_0| \leq r} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}{(z-z_0)^2} dz d\bar{z}$$

Lassen wir ϱ gegen Null gehen, so folgt

$$2\pi i f'(z_0) = \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz + \int_{|z-z_0| \leq r} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}{(z-z_0)^2} dz d\bar{z},$$

und somit

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|z-z_0| \leq r} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}{(z-z_0)^2} dz d\bar{z} = 0$$

Es sei nun z ein beliebiger Punkt aus E , dann ist

$$\begin{aligned} |w'_k(z) - f'(z)| &\leq \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k - \Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\bar{\zeta} \right| \end{aligned}$$

wobei K_r eine in D_k liegende Kreisscheibe um z mit dem Radius r und Γ_r der positiv orientierte Rand von K_r ist.

Wir können nun ein $r_0 > 0$ wählen, so daß das zweite Integral für jedes $r < r_0$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird.

Wegen (a) und (b) existiert ein $k'(z, \varepsilon)$ mit

$$\left| \int_{\Gamma_k - \Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \int_{D_k - K_r} \frac{\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta d\bar{\zeta} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für}$$

alle $k > k'(\varepsilon, z)$.

E ist kompakt und w'_k, f' sind stetig auf E , daher existiert ein $k'(\varepsilon)$ mit

$$|w'_k(z) - f'(z)| < \varepsilon \quad \text{für jedes } k > k'(\varepsilon).$$

Also ist auf E

$$|w_k(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |w'_k(z) - f'(z)| < \varepsilon \quad \text{für}$$

$k > \max(k'(\varepsilon), k(\varepsilon))$. w_k ist holomorph auf E und E ist kompakt und separiert die Ebene nicht, daher existiert (Satz von Runge) eine Polynomfolge p_n , die gleichmäßig gegen w_k konvergiert.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir also k so groß wählen, daß

$$|w_k(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |w'_k(z) - f'(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{auf}$$

E ist, es existiert dann aber auch ein n mit

$$|p_n(z) - w_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |p'_n(z) - w'_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $z \in E$, und somit

$$|p_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |p'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon \quad \text{für alle } z \in E.$$

Eine leichte Folgerung aus Satz 4 ist das

Lemma

Jede auf der kompakten Menge E , die die Ebene nicht separiert und deren Rand aus glatten Kurven oder Bögen besteht, stetig differenzierbare Funktion f ist genau dann auf E simultan durch Polynome approximierbar, wenn die Menge E nur endlich viele Randbögen besitzt.

Beweis:

Daß die Bedingung hinreichend ist, ist leicht aus dem Beweis zu Satz 4 zu sehen.

Wir zeigen kurz, daß sie auch notwendig ist.

Angenommen, die Menge E besitzt unendlich viele Randbögen, dann existiert eine Folge von Randbögen γ_ν $\nu = 1, 2, \dots$, die sich in mindestens einem Punkt z_0 häufen. Es existiert dann auf jedem Bogen γ_ν ein innerer Punkt z_ν , derart daß $\lim_{\nu \rightarrow \infty} z_\nu = z_0$ ist.

Wir wählen die Funktion f folgendermaßen

$f(z) = 0$ für jeden inneren Punkt von E und für $z = z_0$.

Auf einem hinreichend kleinen Bogenstück von γ_ν , in dem z_ν liegt ist $f(z) = \frac{1}{\nu}$ und auf dem Rest von E wird $f(z)$ stetig differenzierbar fortgesetzt.

Dann ist $f'(z_0) = 0$ aber

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{f(z_\nu) - f(z_0)}{z_\nu - z_0} \neq 0 \quad \text{und somit ist } f \text{ auf } E \text{ nicht}$$

simultan durch Polynome approximierbar.

Kapitel III: Simultane Approximation durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen

1.) Einführende Bemerkungen

In einer Arbeit über Approximation durch ganze Funktionen erweiterte Kaplan den Satz von Carleman folgendermaßen:

Zu jeder auf der reellen Achse stetig differenzierbaren Funktion f und zu jeder für $0 \leq r < +\infty$ stetigen positiven Funktion $\varepsilon(r)$ existiert eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w mit:

$$|w(x) - f(x)| < \varepsilon(|x|) \text{ und } |w'(x) - f'(x)| < \varepsilon(|x|) \\ \text{für } -\infty < x < +\infty$$

Im folgenden befassen wir uns mit zwei Erweiterungen zu diesem Satz.

Zunächst wird gezeigt, daß jede auf der reellen Achse stetige, n -fach stetig differenzierbare Funktion f ($n \geq 0$) so durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen approximiert werden kann, daß für $-\infty < x < +\infty$ und jede stetige positive Funktion $\varepsilon(r)$ ($0 \leq r < +\infty$) gilt

$$|f^{(\nu)}(x) - w^{(\nu)}(x)| < \varepsilon(|x|) \text{ für } \nu = 0, 1, \dots, n$$

Danach wenden wir uns der Frage zu, ob jede auf einer Menge E , die aus vom Nullpunkt ausgehenden glatten Jordanbögen besteht, stetig differenzierbare Funktion

f im Sinne des Satzes von Kaplan durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen approximiert werden kann.

Zu den folgenden Entwicklungen benötigen wir den von Kaplan bewiesenen

Hilfssatz 1:

Ist $\varepsilon(r)$ eine auf dem Intervall $[0, +\infty[$ positive stetige Funktion, dann existiert eine reellwertige Funktion $\varepsilon_1(r)$ mit

$$0 < \varepsilon_1(r) < \frac{1}{4} \varepsilon(r), \quad 0 < \int_r^{+\infty} \varepsilon_1(t) dt < \frac{1}{4} \varepsilon(r)$$

für alle $r \in [0, +\infty[$

Beweis: Da $\varepsilon(r)$ auf jedem beschränkten Teilintervall von $[0, +\infty[$ eine positive untere Schranke besitzt, existiert eine stetig differenzierbare Funktion $e(r)$ mit

$$e(r) > -\frac{1}{4} \varepsilon(r), \quad \frac{d}{dr} e(r) > 0 \text{ für jedes } r \in [0, +\infty[$$

$$\text{und } \lim_{r \rightarrow +\infty} e(r) = 0$$

Setzen wir $\varepsilon_1(r) := \min \left[e'(r), \frac{1}{5} \varepsilon(r) \right]$, so ist

$$0 < \int_r^{+\infty} \varepsilon_1(t) dt \leq \int_r^{+\infty} e'(t) dt = -e(r) < \frac{1}{4} \varepsilon(r)$$

$$\text{und } 0 < \varepsilon_1(r) < \frac{1}{4} \varepsilon(r).$$

2.) Simultane Approximation einer auf der reellen Achse mehrfach stetig differenzierbaren Funktion

Satz 5:

Ist die Funktion $f(x)$ für $-\infty < x < +\infty$ n -fach stetig differenzierbar ($n \geq 0$) und ist $\varepsilon(r)$ auf $[0, +\infty[$ positiv und stetig, so existiert eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w mit:

$$|w^{(\nu)}(x) - f^{(\nu)}(x)| < \varepsilon(|x|) \text{ für } \nu = 0, 1, \dots, n \text{ und} \\ x \in]-\infty, +\infty[$$

Wir führen den Beweis induktiv:

Für $n = 0$ ist dieser Satz schon von Carleman bewiesen.

Wir nehmen also an, der Satz 5 gelte für $n - 1$, $n \geq 1$.

Ohne Einschränkung kann vorausgesetzt werden, daß

$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon(r) = 0$ ist. Die Funktion $\varepsilon_1(r)$ wird dann

dem Hilfssatz 1 entsprechend gewählt. Die Funktion f sei nun n -fach stetig differenzierbar auf der reellen Achse, daher existiert gemäß der Induktionsannahme eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w mit

$$|w(x) - f(x)| < \varepsilon_1(|x|) \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n \text{ und}$$

alle $x \in]-\infty, +\infty[$

Wir setzen $w(0) = f(0)$. Da $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon(r) = 0$ ist, existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [f'(t) - w'(t)] dt = a$$

und

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x [f'(t) - w'(t)] dt = b$$

Ist nun $a = b$, so approximiert die Funktion w_1 ,
 $w_1(z) = w(z) + a$, die Funktion f in gewünschter Genauigkeit.

Es sei also $a \neq b$:

Die Funktion $\varepsilon_2(r)$ wird auf $[0, +\infty[$ definiert durch

$$\varepsilon_2(r) := \min \left[\varepsilon_1(r), \frac{1}{4} |a - b| \frac{1}{(1 + r)^2} \right] \quad , \text{ dann ist}$$

$$0 < \int_0^{+\infty} \varepsilon_2(r) dr \leq \frac{1}{4} |a - b|$$

Die Funktion g ($g(x) = f(x) - w(x)$) ist auf der reellen Achse n -fach stetig differenzierbar, also existiert eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion h mit

$$|h^{(v)}(x) - g^{(v)}(x)| < \varepsilon_2(|x|) \quad \text{für } v = 1, 2, \dots, n.$$

Wir setzen $h(0) = 0$

Es existieren dann die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x h'(t) dt = A \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x h'(t) dt = B$$

und es ist

$$\begin{aligned} |A - B - (a - b)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (h'(x) - [f'(x) - w'(x)]) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h'(x) - g'(x)| |dx| < \end{aligned}$$

$$< 2 \int_0^{+\infty} \varepsilon_2(r) \, dr \leq \frac{1}{2} |a - b|$$

also ist $|A - B| > \frac{1}{2} |a - b|$.

Daher existieren komplexe Konstanten α und β mit

$$\alpha + A\beta = a$$

$$\alpha + B\beta = b$$

und es ist

$$|\beta| = \frac{|a - b|}{|A - B|} < 2$$

Setzen wir $h_1(z) := \alpha + \beta h(z)$, so hat die Funktion h_1 die folgenden Eigenschaften:

h_1 ist in der ganzen Ebene holomorph.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1^{(\nu)}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h_1^{(\nu)}(x) = 0 \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n$$

$$|h_1^{(\nu)}(x)| < |\beta| \varepsilon_2(|x|) = 2 \varepsilon_1(|x|) \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_1(x) = a \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} h_1(x) = b.$$

Die in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w_1 sei gebildet durch $w_1(z) := w(z) + h_1(z)$.

Dann gilt

$$|f^{(\nu)}(x) - w_1^{(\nu)}(x)| \leq |f^{(\nu)}(x) - w^{(\nu)}(x)| + |h_1^{(\nu)}(x)| <$$

$$< 3 \varepsilon_1(|x|) < \varepsilon(|x|) \text{ für } \nu = 1, 2, \dots, n$$

und

$$\int_x^{+\infty} [f'(t) - w_1'(t)] \, dt = w_1(x) - f(x) \quad \text{für } x \geq 0$$

$$\int_x^{-\infty} [f'(t) - w_1'(t)] dt = w_1(x) - f(x) \quad \text{für } x \leq 0$$

Also ist für jedes x

$$|w_1(x) - f(x)| < 3 \int_{|x|}^{+\infty} \varepsilon_1(t) dt < \varepsilon(|x|) \quad ,$$

womit der Satz 5 bewiesen ist.

Es ist klar, daß der Satz 5 nicht dahingehend erweitert werden kann, daß jede auf der reellen Achse definierte und dort beliebig oft stetig differenzierbare Funktion f simultan in sämtlichen Ableitungen durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen approximiert werden kann.

Der Vollständigkeit wegen geben wir ein Gegenbeispiel an. Die Funktion f wird auf der reellen Achse folgendermaßen definiert

$$f(x) = \begin{cases} c - \frac{1}{1-x^2} & \text{für } -1 < x < +1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

dabei ist c eine beliebige Konstante.

f ist dann beliebig oft auf der reellen Achse differenzierbar. Gäbe es nun eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w mit

$$|f^{(v)}(x) - w^{(v)}(x)| < 1 \quad \text{für } -\infty < x < +\infty \quad \text{und } v=0,1,2,\dots,$$

so wäre

$$|f(0) - w(0)| < 1 \text{ also } |w(0)| > \frac{|c|}{e} - 1 \quad (1)$$

und

$$|f^{(\nu)}(1) - w^{(\nu)}(1)| < 1 \text{ also } |w^{(\nu)}(1)| < 1 \text{ für } \nu = 0, 1, 2, \dots$$

Daraus folgt

$$|w(0)| \leq \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{|w^{(\nu)}(1)|}{\nu!} < \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{\nu!} = e \quad (2)$$

Wählen wir $c = e^2 + e$, so sind (1) und (2) nicht vereinbar.

3.) Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kaplan

Das Carleman - Kontinuum E bestehe aus vom Nullpunkt ausgehenden glatten, nicht beschränkten Jordanbögen. Von dem Satz von Kaplan ausgehend, untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen jede auf E stetig differenzierbare Funktion simultan und asymptotisch auf E durch in der ganzen Ebene holomorphe Funktionen approximierbar ist. Eine zu 2.) Kapitel II analoge Schlußweise ergibt, daß E nur aus endlich vielen Bögen bestehen darf. Wir beweisen nun den folgenden Satz.

Satz 6:

Besteht das Carleman - Kontinuum E aus endlich vielen unbeschränkten Kurven $S_1, \dots, S_n$, die die Darstellung

$$S_k = S_k(r) = r e^{i \varphi_k(r)} \quad (k = 1, \dots, n; r \in [0, +\infty[)$$

besitzen, wobei die Funktionen $\varphi_k(r)$ stetig differenzierbar sind und der Bedingung

$$r \frac{d}{dr} \varphi(r) = O(1) \quad \text{genügen,}$$

ist die Funktion f stetig differenzierbar auf E und ist $\varepsilon_0(r)$ eine für $0 \leq r < +\infty$ positive stetige Funktion, dann existiert eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion w mit

$|f(z) - w(z)| < \varepsilon_0(|z|)$, $|f'(z) - w'(z)| < \varepsilon_0(|z|)$
für alle $z \in E$.

Dazu benötigen wir den

Hilfssatz 2:

Es seien $\varepsilon(r)$, $\varepsilon_1(r)$ dem Hilfssatz 1 entsprechend
gegeben, und es gelte $\varepsilon(r) \leq 1$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Die Menge $E = \bigcup_1^n S_v$ genüge den unter Satz 6 gefor-
derten Bedingungen. Es existiert dann eine in der
ganzen Ebene holomorphe Funktion h_0 mit den folgenden
Eigenschaften:

$$|h_0(z)| \leq 1, \quad |h_0'(z)| < \varepsilon_1(|z|) \quad \text{für alle } z \in E$$

Die Grenzwerte $\lim_{r \rightarrow +\infty} h_0(re^{i\varphi_k(r)}) = B_k$ ($k = 1, \dots, n$)

existieren, und es gilt $B_k \neq B_j$, wenn $k \neq j$ ist.

Beweis: Der Wahl der Kurven entsprechend gibt es
eine positive Konstante A , so daß für $k = 1, \dots, n$
gilt $|r\varphi_k'(r)| \leq A$. Nun werden positive Zahlen
 $c, c_1, \dots, c_n$ so gewählt, daß

$$(c_1 + c)(1 + A) < 1, \quad c_k - (c_{k+1} + 2c)(1 + A) > 0, \\ c_n - c > 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, n-1 \text{ ist.}$$

K_ρ sei die offene Kreisscheibe um den Nullpunkt mit
dem Radius $\rho > 0$. Wir definieren die Funktion g auf

E folgendermaßen

$$g(z) := c_k \varepsilon_1(|z|) e^{-i \varphi_k(|z|)} \quad z \in S_k \setminus K_g$$

und auf dem Rest von E wird g stetig fortgesetzt,
so daß dort $|g(z)| \leq c_1 \varepsilon_1(|z|)$ ist.

Es existiert somit zu g eine in der ganzen Ebene holomorphe Funktion h_0 (Satz 2) mit:

$$\begin{aligned} |g(z) - h_0'(z)| &< c \varepsilon_1(|z|) \text{ für alle } z \in E; \text{ also ist} \\ |h_0'(z)| &< |g(z)| + c \varepsilon_1(|z|) = (c_1 + c) \varepsilon_1(|z|) < \varepsilon_1(|z|) \\ z &\in E \end{aligned}$$

$$e^{i \varphi_k(|z|)} g(z) \text{ ist positiv auf } E \setminus K_g. \text{ Daher folgt}$$

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} h_0'(z)| &< c \varepsilon_1(|z|) \\ \operatorname{Re} \{ e^{+i \varphi_k(|z|)} h_0'(z) \} &> (c_k - c) \varepsilon_1(|z|) \\ &\text{für jedes } z \in S_k \setminus K_g \quad (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung kann $h_0(0) = 0$ gesetzt werden.

Somit ist

$$h_0(z) = \int_0^z h_0'(\xi) d\xi$$

Also ist für jedes $z \in S_k$

$$|h_0(z)| \leq \int_0^z |h_0'(re^{i \varphi_k(r)})| (1 + |r \varphi_k'(r)|) dr <$$

$$< \int_0^{+\infty} (c_1 + c)(1 + A) \varepsilon_1(r) dr <$$

$$< (c_1 + c)(1 + A) \varepsilon(0) \leq 1$$

Wegen der Wahl von $\varepsilon(r)$ existieren die Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} h_0(\operatorname{re}^{i\varphi_k(r)}) = B_k \quad (k = 1, \dots, n)$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} |B_k| - |B_{k+1}| &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \{ h'_0(\operatorname{re}^{i\varphi_k(r)}) e^{i\varphi_k(r)} (1 + ir\varphi'_k(r)) \} dr \\ &- \int_0^{+\infty} |h'_0(\operatorname{re}^{i\varphi_{k+1}(r)})| (1 + r|\varphi'_{k+1}(r)|) dr \\ &\geq \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \{ h'_0(\operatorname{re}^{i\varphi_k(r)}) e^{i\varphi_k(r)} \} dr \\ &- \int_0^{+\infty} |\operatorname{Im} h'_0(\operatorname{re}^{i\varphi_k(r)})| |r\varphi'_k(r)| dr - \\ &- \int_0^{+\infty} |h'_0(\operatorname{re}^{i\varphi_{k+1}(r)})| (1 + |r\varphi'_{k+1}(r)|) dr \\ &> [c_k - (c_{k+1} + 2c)(1 + A)] \int_{\mathfrak{g}}^{+\infty} \varepsilon_1(r) dr - \mathfrak{g}H \end{aligned}$$

wobei $H = 4 (\max |g(z)| + c)$ gesetzt wird. Für hin-

reichend kleines $\mathfrak{g}$ ist also $|B_k| - |B_{k+1}| > 0$ und

somit $B_k \neq B_j$ für $k \neq j$.

Nun sind wir in der Lage, den Satz 6 zu beweisen.

Es sei h_0 dem Hilfssatz 2 entsprechend gewählt, dann betrachten wir die Funktionen

$$h_0^0, h_0^1, \dots, h_0^{n-1}; \quad h_0^j(z) := [h_0(z)]^j$$

Es gilt dann

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_0^j(r e^{i\varphi_k(r)}) = B_k^j \quad (j = 0, 1, \dots, n-1; k = 1, \dots, n)$$

und $\det (B_k^j) = d \neq 0$.

Somit hat das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_j B_k^j = A_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

genau eine Lösung $a_0, \dots, a_{n-1}$. Ist (β_1^m) die zu (B_k^j) inverse Matrix, so erhält man für $j = 1, \dots, n-1$

$$|a_j| \leq \sum_{k=1}^n |A_k \beta_j^k| < C_0 \left[\max_k A_k \right]$$

wobei C_0 nur von der Matrix (B_k^j) abhängig ist.

Es sei nun $C = \int_0^{+\infty} \varepsilon_1(r) dr$, dann setzen wir

$$\varepsilon_2(r) = \frac{1}{n^2} \min \left[1, \frac{1}{C_0 C (1+A)} \right] \varepsilon_1(r)$$

Aus Satz 2 folgt dann die Existenz einer in der ganzen Ebene holomorphen Funktion w mit

$$|f'(z) - w'(z)| < \varepsilon_2(|z|) \quad \text{für alle } z \in E.$$

und es existieren die Grenzwerte

$$A_k = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R [f'(re^{i\varphi_k(r)}) - w'(re^{i\varphi_k(r)})] e^{i\varphi_k(r)} (1 + ir \varphi'_k(r) dr) .$$

Es ist

$$|A_k| < [n^2 C_0 C(1+A)]^{-1} \int_0^{+\infty} \varepsilon_1(r) (1+A) dr \leq \frac{1}{n^2 C_0} ,$$

somit folgt, wenn wir speziell diese Werte A_k in das lineare

$$|a_j| < C_0 \left[\max_k A_k \right] < \frac{1}{n^2} .$$

Bilden wir nun die Funktion h durch

$$h(z) := \sum_{j=0}^{n-1} a_j h_0^j(z)$$

so folgt $\lim_{r \rightarrow \infty} h(re^{i\varphi_k(r)}) = A_k$

und $h'(z) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k h_0'(z) h_0^{k-1}(z) .$

Für $z \in E$ ist dann

$$|h'(z)| \leq |h_0'(z)| \sum_{k=1}^{n-1} k |a_k| |h_0^{k-1}(z)| < |h_0'(z)| < \varepsilon_1(|z|)$$

Setzt man nun $w_1(z) = w(z) + h(z)$, dann ist für $z \in E$:

$$|f'(z) - w_1'(z)| \leq |f'(z) - w'(z)| + |h_0'(z)| < 2 \varepsilon_1(|z|) < \varepsilon_0(|z|)$$

und

$$\int_0^\infty [f'(\zeta) - w_1'(\zeta)] d\zeta = w_1(z) - f(z) .$$

Damit erhält man für $z \in S_k$

$$|w_1(z) - f(z)| \int_{|z|}^{+\infty} 2(1+A) \varepsilon_1(r) dr < (1+A) \varepsilon(|z|) \leq \varepsilon_0(|z|)$$

Also ist für jedes $z \in \mathbb{E}$

$$|w_1(z) - f(z)| < \varepsilon_0(|z|) \quad \text{und} \quad |w_1'(z) - f'(z)| < \varepsilon_0(|z|)$$

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] Appell,P. Developpements en séries dans une aire
limitée par des arcs de cercle.
Acta Math. Bd.1 (1882)
- [2] Caratheodory,C. Funktionentheorie. Bd.2
Verlag Birkhäuser, Basel (1950)
- [3] Carleman,T. Sur un Théorème de Weierstraß.
Ark.Math.Astr.Fys. 208 no.4 (1927)
- [4] Dinghas,A. Vorlesungen über Funktionentheorie.
Springer Verlag, Berlin (1961)
- [5] Hartogs,F./ Über Folgen analytischer Funktionen.
Rosenthal,A. Math.Annalen 104 (1931)
- [6] Kaplan,W. Approximation by Entire Functions.
Michigan Math.Journal 3 (1955/56)
- [7] Keldys,M.V. Sur l'approximation des fonctions
analytiques dans des domaines fermés.
Mat.Sbornik N.S. 8 (1940)
- [8] Keldys,M.V. Sur un problème de Carleman.
Lavrent'ev M.A. C.A.(Doklady) Acad.Sci. U RSS 23 (1939)
- [9] Lavrent'ev M.A. Sur les fonctions d'une variable complexe
représentables par des series de polynomes.
Hermann, Paris (1936)
- [10] Mergelyan, S.N. On a Theorem of M.A.Lavrent'ev
Doklady Akad.Nauk SSSR (N.S.)77 (1951)
- [11] Mergelyan,S.N. On the Representation of Functions by Series
of Polynomials on closed Sets.
Doklady Akad.Nauk SSSR (N.S.) 78 (1951)
- [12] Mergelyan,S.N. Uniform Approximations to Functions of
a Complex Variable.
Uspehi Mat.Nauk (N.S.) 7 no.2 (1952)
- [13] Nehari,Z. Conformal Mapping
McGraw-Hill Book Comp., New York (1952)
- [14] Nevanlinna,R. Eindeutige analytische Funktionen.
Springer, Berlin (1936)
- [15] Roth,A. Approximationseigenschaften und Strahlen-
grenzwerte meromorpher und ganzer Funktionen.
- [16] Runge,C. Zur Theorie der analytischen Funktionen.
Acta Math. 6 (1885)
- [17] Vitushkin,A.G. Analytic Capacity of Sets in Problems of
Approximation Theory.
Russian Math.Surveys Vol.22 No.6 (1957)

- [18] Walsh, J.L. Interpolation and Approximation.
Am.Math.Soc.Coll.Publ. Vol.XX (1956)
- [19] Weierstraß, K. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente.
Sitzungsber. Akad.Berlin (1885)
- [20] Zalcman, L. Analytic Capacity and Rational Approximation.
Lecture Notes in Math. 50 Springer, Berlin (1968)

Lebenslauf

Ich, Dieter Wrase, wurde am 3. Januar 1945 als Sohn des Bahnbeamten Ernst Wrase und seiner Ehefrau Marianne Wrase geb. Adrian in Kalisch geboren.

Von 1951 bis 1957 ging ich zur Grundschule und von 1957 bis 1961 zur 2. Oberschule technischen Zweiges in Berlin-Lichterfelde. Anschließend besuchte ich die Oberstufe der Hermann Ehlers Schule in Berlin-Steglitz und erhielt dort am 2. März 1964 das Zeugnis der Reife.

Zum Sommersemester 1964 wurde ich zum Studium der Mathematik an der Freien Universität Berlin zugelassen. Am 8. Juli 1969 bestand ich die Diplomprüfung in Mathematik.

